**Лабораторная работа № 1**

**Анализ и генерация случайных чисел. Основы имитационного моделирования**

Цель работы:  Изучение основных характеристик случайных величин на базе теории вероятностей и математической статистики; изучение и программирование способов получения псевдослучайных чисел.

**Теоретическая часть**

**Основные понятия и характеристики стохастического процесса**

**1. Вероятность**-  мера возможности осуществления результата. Формально это функция Р(х), которая ставит в соответствие результатам некоторые вещественные числа и удовлетворяет аксиомам:

1. 0≤Р(х)≤1,  для любого результата х,
2. Р(s) = 1, где s – пространство выборки,
3. если х1 ,  х2 ,  х3 – взаимоисключающие  результаты,  то вероятность их появления равна сумме вероятностей появления  каждого из хi, то есть P(х1 ∪ х2 ∪ х3 ...) = Р(х1)+Р(х2)+P(x3)+...

**2. Случайной  величиной**называется функция, которая ставит в соответствие каждому результату из пространства выборки некоторое вещественное число.

Случайные величины, имеющие конечное  или счетное  множество значений, называются дискретными:  а если  они  имеют  континуум значений, то являются непрерывными случайными величинами.

**3*.* Вероятностное** распределение представляет  собой  некоторое правило  задания вероятности для каждого из всех возможных значений случайной переменной.

Вероятностное распределение  характеризуется функцией вероятности р(х) и функцией распределения  F(x),  Функция  вероятности устанавливает конкретную вероятность того, что случайная переменная  Х  принимает значение хi; функция, распределения определяет вероятность того,  что случайная   величина  X примет значение меньше заданного  х.

 Для  дискретной  случайной   величины   эти   характеристики определяются следующим образом:

* р(хi) = Р( Х = хi)  со следующими  ограничениями:
* F(x) = P( X < x )   со следующими свойствами:

Функция распределения  и функция вероятностей связаны следующим образом:

Для непрерывных  случайных величин функция вероятности заменяется на непрерывную функций плотности вероятности f(x), определяемую как:

 Функция распределения:

**4. Математическое ожидание**  -  взвешенная по вероятности средняя величина всех возможных значений X, определяющая меру центральности распределения.

* для дискретнойX
* если Х непрерывна.

**5.** Математическое ожидание Хn  называется n-м моментом  случайной переменной и определяется следующим образом:

* для дискретнойX
* если Х непрерывна.

Вариацией n-го момента называется n-й момент среднего: .

**6. Дисперсией**случайной переменной называется  второй  момент среднего, являющийся мерой разброса вероятностного распределения:

  для дискретной Х

    для непрерывной Х

для любой.

**7. Среднеквадратичным отклонением**случайной величины называется квадратный корень из дисперсии этой величины :  .

Функционирование элементов системы, подверженных случайным воздействиям, задается *генераторами слу­чайных чисел,* реализуемых программными методами, вырабатывающими псевдослучайные последовательности. *Псевдослучайными последовательностями* называют впол­не детерминированные числа, обладающие статистиче­скими свойствами случайных чисел, определяемых путем их проверки специальными тестами, а также периодич­ностью, т. е. повторяемостью через определенные проме­жутки времени. При моделировании используются интер­валы последовательностей псевдослучайных чисел, в ко­торых нет одного числа, встречающегося более одного раза.

Равномерно распределенные случайные числа в процессе генерации случайных величин с другими вероятностными распределениями, в том числе нормальным, пуассоновским и биномиальным. В настоящее время известно множество методов машинной имитации равномерно рас­пределенной случайной величины r(где 0≤r≤1). Соответствующие программы-генераторы вычисляют так называемые псевдослучай­ные числа, которые, хотя и определяются вполне детерминиро­ванными отношениями, обладают статистическими свойствами слу­чайных чисел, равномерно распределенных на интервале (0,1). Псевдослучайную последовательность, выдержавшую ряд специ­альных статистических тестов (частотных, автокорреляционных и т. д.), можно использовать как «истинно» случайную, хотя в дей­ствительности она таковой не является.

Прежде чем перейти к описанию конкретных генераторов псев­дослучайных чисел, сформулируем набор требований, которым обязан удовлетворять *идеальный* генератор. Полученные с его по­мощью последовательности должны состоять из:

(1) равномерно распределенных,

(2) статистически независимых,

(3) воспроизво­димых и

(4) неповторяющихся чисел.

Кроме того, генератор дол­жен (5) работать быстро и (6) занимать минимальный объем машин­ной памяти. Конгруэнтные процедуры, описанные здесь, удовлет­воряют *всей* совокупности перечисленных требований лучше, чем любые другие методы генерирования случайных чисел.

Мы рассмотрим 3 метода построения псевдослучайных последо­вательностей на ЭВМ — (1) мультипликативный, (2) смешанный и (3) комбинационный методы. После описания механизмов и некото­рых свойств этих процедур мы кратко остановимся на проблеме автокорреляции псевдослучайных чисел и различных тестах, с помощью которых оценивается их «случайность».

**Методы генерирования псевдослучайных чисел**. **Конгруэнтные методы**

Для любой конгруэнтной процедуры можно получить формулу, позволяющую найти i-й член определяемой ею последо­вательности псевдослучайных чисел *{п0, п1, п2,..., пi, …* }, не зная никаких членов, кроме нулевого. Тем не менее, в практических приложениях эту последовательность можно рассматривать как реализацию случайного процесса, если только она выдержит ряд специальных статистических тестов, состав которых определяется способом ее применения. Иногда, например, достаточно, чтобы псев­дослучайные числа были равномерно распределены и статистически независимы. (Можно показать, что конгруэнтные методы достаточ­но хорошо удовлетворяют этим условиям.) Все конгруэнтные гене­раторы автоматически удовлетворяют также требованиям (3) и (6), перечисленным выше, поскольку генерируемые с их помощью по­следовательности полностью воспроизводимы и занимают мини­мальный объем машинной памяти. Только степень выполнения (4) и (5) целиком определяется свойствами конкретной схемы. Поэтому рассматриваемые в дальнейшем процедуры анализируются именно с этих позиций.

В основе конгруэнтных процедур генерирования псевдослучай­ных чисел лежит математическое понятие *сравнения.*

Говорят, что два целых числа *а* и b *сравнимы по модулю т,* если их разность кратна числу *т.* Отношение сравнения записывают a≡b(mod *т)* и читают: «а сравнимо с bпо модулю m». Это значит, что разность *а — b* делится на *т* без остатка, т. е. числа *а* и bдают одинаковые, остатки при делении на *т.* Например, 1897≡7 (mod 5) и 4339≡39 (mod 102).

Все конгруэнтные методы опираются на рекуррентную формулу:

(1)

где *пi* , *т*, *λ* и *μ —* неотрицательные целые числа. Запишем (1) при i=0, 1, 2...:

(2)

…

.

Если дано *начальное значение* n0, *множитель* λ и *аддитивная константа* μ, то (2) определяет последовательность целых чисел {n1, n~~2~~,…, ni,…}, составленную из остатков от деления на m членов последовательности Таким образом, для любого i≥1 справедливо неравенство . По целым числам после­довательности {ni} можно построить последовательность {ri}= = {ni/m}рациональных чисел из единичного интервала.

Естественно возникает вопрос о существовании наименьшего положительного числа h*,* при котором nh ≡ n0(mod m)(число hназывают периодом последовательности {ni}). Если такое число b*,* существует, то как надо выбрать параметры n0 , т, λ и μ *,* чтобы сделать период максимальным? Величина hсущественна, поскольку nh ≡ n0(mod m)влечет за собой nh+1=n1, nh+2=n2,.... Таким обра­зом, последовательность {ni}будет периодической, т. е. значения ее членов будут повторяться через hномеров.

Можно показать, что период h всегда существует, причем его максимальное значение является монотонно возрастающей функцией модуля m. Это значит, что конгруэнтные методы не позволяют строить последовательности неповторяющихся псевдослучайных чисел. Тем не менее, в практических ситуациях можно обеспечить удовлетворительную величину периода h, выбирая достаточно боль­шой модуль или применяя другие способы.

***Мультипликативный конгруэнтный алгоритм***задает последо­вательность неотрицательных целых чисел {ni}, не превосходящих *т,* по формуле:

(3)

представляющей собой частный случай формулы (1) при μ=0. Оказалось, что этот метод обладает достаточно хорошими статисти­ческими характеристиками. Выбирая соответствующим образом параметры λ и *п0,* с его помощью можно получить последователь­ности равномерно распределенных некоррелированных псевдослу­чайных чисел.

Более того, при выполнении определен­ных условий на эти параметры генерируемая мультипликативным алгоритмом последовательность обладает максимальным при дан­ном модуле периодом. Поскольку метод полностью детерминиро­ван, последовательности полностью воспроизводимы. Мультипли­кативный алгоритм требует минимального объема машинной памяти. С вычислительной точки зрения он сводится к последовательному подсчету произведения двух целых чисел — операции, которая очень быстро выполняется современными ЭВМ.

Для численной реализации наиболее удобна версия алгоритма, в которой модуль *т* равен pe*,* где p *—* число цифр в системе счис­ления, используемой в машине, а *е —* длина машинного слова, отводимого под запись числа. Для двоичной машины p*=2,* для десятичной р=10. Величина *е* для ЭВМ с фиксированной длиной слова задана, а для ЭВМ с переменной длиной слова ее выбор оста­ется на усмотрение программиста. В дальнейшем вместо *е* мы будем употреблять символы bи d*,* относящиеся соответственно к двоич­ной и десятичной ЭВМ.

Выбор *т=pе* удобен по двум причинам.

1. Во-первых, вычисление остатка от деления на т сводится к выделению е младших разрядов делимого;
2. во-вторых, преобразование целого числа в рациональную дробь из интервала (0,1) осуществляется подстановкой слева от него двоичной или десятичной запятой.

Таким образом, специаль­ный выбор числа *т* позволяет исключить из процесса счета две опе­рации деления.

Так как в большинстве ЭВМ используются двоичная и десятич­ная системы счисления, мы рассмотрим мультипликативный метод именно в этих двух случаях. При этом нас будут интересовать только последовательности, порождаемые отношением сравнения вида

**Двоичные машины**

В этом случае m==2b, где b *—* число двоичных цифр (битов) в машинном слове. Максимальный период последовательности, гене­рируемой мультипликативной процедурой, равен 2b-2. Алгоритм построения последовательности с максимальным периодом таков:

1. Выбрать в качестве параметра n*0* произвольное нечетное чис­ло.
2. Вычислить коэффициент λпо формуле λ=8t±3, где t — любое целое положительное число.
3. Вычислить произведение λn0*.* Полученное число содержит не более *2b* значащих разрядов. Взять bмладших в качестве пер­вого члена последовательности, n1остальные отбросить.
4. Вычислить дробь из интервала (0,1) по формуле r1=n1/2b*.*
5. Вычислить очередное псевдослучайное число n*1* +1 как bправых разрядов произведения λn1и вернуться к п. 4.

В качестве иллюстрации описанной схемы рассмотрим пример, в котором b=4. Мультипликативная процедура должна опреде­лить 4 разных числа (h=24-2=4).

1. Положим n0=7. В двоичной форме записи n0=0111.
2. При t=1 коэффициент λ можно взять равным 11 или 5. Мы выберем λ =5, или в двоичной форме, λ = 0101.
3. λn0= (0101)(0111) = 00100011. Отсюда n1 = 0011 и r1 = 3/16 = 0,1875.
4. λn1= (0101)(0011) = 00001111. Отсюда n2 = 1111 и r2 = 15/16 = 0,9375.
5. λn2= (0101)(1111) = 01001011. Отсюда n3 = 1011 и r3 = 11/16 = 0,6875.
6. λn3= (0101)(1011) = 00110111. Отсюда n4 = 0111 =n0 и r4 = 7/16 = 0,4375.

Для 32х разрядного машинного слова m=231 = 2147483648. При этом в 32хразрядном машинном слове, максимальное целое число, размещающееся в машинном слове, равно 231 -1, cледовательно m = 2147483647, b - простое число относительно m: b=2531011, λ=8t±3, где t целое число, λ = 214013.

Метод Неймана (метод квадратов)

В квадрат возводится, текущее случайное число и из результатов средних разрядов выделяется следующее случайное число, т.е. используется итерация:

* z0 равно некоторому n- разрядному целому числу (например, 9876)
* z1 определяется следующим образом :  z0\*z0 = 97535376 , z1 =5353 z2=6546 и т.д.

ri+1= z i+1/10n

3. Метод произведений

Два следующих друг за другом случайных числа умножают и из произведения средних разрядов выделяют следующее случайное число.

**Проверка генераторов равномерно распределенных** **псевдослучайных чисел**

Выделяют три вида проверки: на периодичность, на случайность, на равномерность. При проверке на случайность используется совокупность тестов проверки: 1) частот, 2) пар,  3)комбинаций, 4) серий, 5) корреляции.

*Тест проверки частот* предполагает разбиение диапазо­на распределения на q интервалов и подсчет количества попаданий случайных чисел в выделенные интервалы. Возможно использование критериев согласия. Вероят­ность попаданий в заданный интервал теоретического распределения определяется по формуле

где xi - верхний предел i-го интервала.

*Тест проверки пар* заключается в подсчете количества «1» для каждого разряда случайного числа. В этом слу­чае используется критерий согласия χ2 с одной степенью свободы. Теоретическая вероятность появления «1» для равномерно распределенных случайных чисел pi =1/2. Поразрядный анализ позволяет отбросить неслучайные разряды, в качестве которых часто оказываются млад­шие разряды с преобладанием в них «1».

*Тест проверки комбинаций* сводится к подсчету коли­чества «1» в случайных числах. Можно использовать также критерии согласия. Теоретическая вероятность появления комбинации с i-м количеством «1» будет: где k — количество разрядов случайного числа.

*Тест проверки серий* заключается в подсчете коли­чества различных длин последовательностей одинаковых значений случайных чисел. Возможно использование критериев согласия. Теоретическая вероятность , где  *—* количество серий i-и длины в *N* случайных числах; — общее количество серий в *N* случайных чис­лах при гипотетическом распределении.

Характерная особенность приведенных формул теста серий — независимый учет серий различной длины. На­пример, одна и та же серия, состоящая из четырех еди­ниц, учитывается как одна серия из четырех, две — из трех и три — из двух единиц.

*Тест проверки корреляции* заключается в определении коэффициента корреляции. При этом выполняют следующие действия:

* запускают два генератора случайных чисел на отрезке апериодичности с некоторой разницей между собой;
* подсчитывают коэффициент корреляции между этими последовательностями.

*Проверка на равномерность*. При про­верке на равномерность можно использовать тест про­верки частот, так как гистограмма частот хорошо отра­жает равномерность распределения случайных чисел по всему диапазону изменения. Для равномерного распре­деления случайных чисел и .

Задаемся    доверительной вероятностью w того, что оценка математического ожидания M\* не выйдет за пределы доверительного интервала:

Р{|М - M\*| < e} = w     или     Р{М - e < М\* < M + e}= w,

где M=(a+b)/2,   - теоретические величины математического ожидания и среднеквадратичного отклонения, e - бесконечно малая величина. Величина w должна быть достаточно большой и составлять 0.9, 0.95, 0.99.

***ЗАДАНИЕ 1***

Для стандартного генератора случайных чисел выбранного Вами языка программирования получить три последовательности  N случайных чисел (N={100, 1000, 10000}), для которых определить следующие характеристики: математическое ожидание М, дисперсию D и среднеквадратичное отклонение .

Выполнить проверку частотности и равномерности генератора.

Построить графики  Функций Р(X) для оценки частотности генератора. Для получаемой выборки  N  чисел  Р(X) – вероятность попадания генерируемой случайной величины в соответствующий интервал ее области определения.

Сравнить результаты с теоретическими.

Для оценки равномерности генератора случайных чисел выполнить расчет математического ожидания Mi для i  последовательностей  из 1000 случайных чисел (i=1,2,..., 10) и для i последовательностей случайных чисел переменной длины (длина  i-ой  последовательности задается как i\*1000;  i = 1, 2, ..., 10). Построить графики зависимости разности (М-Мi) от номера  последовательности i, где  М - теоретическое  математическое ожидание равномерного распределения случайных чисел,  Мi - расчетное математическое ожидание для  i-й последовательности случайных чисел,  полученных от генератора. По данным результатам определить  Р{|М-Мi|<σ} - вероятность того, что отклонения расчетного математического ожидания от теоретического не превышают величину теоретического среднеквадратичного отклонения.

***ЗАДАНИЕ 2***

Запрограммировать заданный вариант генератора случайных чисел и выполнить для него задание 1.

***Порядок выполнения работы:***

1.     Изучить теоретическую часть, ответить на контрольные вопросы.

2.     Получить у преподавателя  свой вариант задания

3.     Выполнить задания 1 и 2.

4.     Оформить отчет.

***Содержание отчета:***

1. Описание и текст процедур заданий 1 и 2. Полученные результаты и  графики.

2. Сравнение характеристик  стандартного  и  запрограммированного генераторов случайных чисел.

3. Выводы.

***Контрольные вопросы***

1. Пусть стохастический процесс заключается в 3-х бросаниях монеты. Случайная величина X, характеризующая его, пусть обозначает число орлов, выпавших в результате 3-х бросаний. Построить для Х функции Р(х) и F(x).

2. Построить F(x) по заданной f(x).

3. Может  ли быть случайная величина одновременно и дискретной и непрерывной?

4. Каков  "физический" смысл  понятий математическое ожидание и дисперсия?

5. Какие способы генерации случайных чисел Вы знаете?

6. Каким требованиям должны удовлетворять  генераторы  псевдослучайных чисел?

***Варианты заданий***

|  |
| --- |
|  |

1. Метод серединных квадратов
2. Метод серединных произведений
3. Метод перемешивания
4. Линейный конгруэнтный метод
5. Инверсный конгруэнтный метод

## Лабораторная работа № 2

**Получение случайной величины, распределенной по заданному закону**

Цель работы. Изучение различных законов распределения случайных величин и способов их получения при моделировании случайных процессов.

**Теоретическая часть**

**ГЕНЕРИРОВАНИЕ ДАННЫХ**

В программе имитации на ЭВМ часто применяются численные методы (т.е. методы, которые можно запрограммировать на вычисли­тельной машине) генерирования данных. Информацию, используе­мую в имитационном эксперименте, можно либо ввести в ЭВМ с внеш­них источников, таких, как перфокарты и магнитные ленты, либо генерировать при помощи специальных программ. Если среди экзо­генных переменных модели есть случайные величины с известным вероятностным распределением, то надо построить численный процесс случайного выбора из совокупности с заданным распределе­нием. Результатом повторения этого процесса на цифровой вычисли­тельной машине должно быть такое вероятностное распределение выборочных значений, которое соответствует вероятностному рас­пределению изучаемой, переменной.

При рассмотрении дискретных или непрерывных случайных процессов вводят функцию F*(х),* называемую *кумулятивной функ­цией распределения* величины *X.* Эта функция задает вероятность того, что случайная величина *X* принимает значение, не превос­ходящее число *х.* Если случайная величина дискретна, т.е. *X* при­нимает конечное число значений, то функция F*(х)* является ступенчатой. Если функция F*(х)* непрерывна, то ее можно продифферен­цировать и положить f(x)=dF(х)/dх.Функция f*(х)* называется функцией плотности вероятностей. Кумулятивную функцию рас­пределения можно определить как , где F*(х)* изменяется на отрезке [0,1], а *f(t)* представляет собой зна­чение функции плотности вероятностей случайной величины *X* при *Х=t.*

При генерировании случайных величин, имеющих различные функции распределения, используются равномерно распределенные случайные величины. Равномерно распределенные случайные ве­личины будем обозначать через r*, , F(r)=r.*

В лабораторной работе №1 дан обзор методов генерирования случайных величин, равномерно распределенных на интервале (0,1). Числа, получаемые таким об­разом, называются псевдослучайными, так как, хотя они и гене­рируются на ЭВМ при помощи чисто детерминированной рекурсив­ной формулы, их статистические свойства совпадают со статисти­ческими свойствами чисел, генерированных идеальным случайным механизмом, выбирающим числа из интервала (0,1) независимо и с одинаковой вероятностью. Пока эти псевдослучайные числа удовлетворяют некоторому набору статистических критериев (частотный, сериальной корреляции, интервалов, пар и др.), отражающих свойства идеального случайного механизма, их можно считать «истинно» случайными числами, хотя на самом деле это не так.

Генераторы псевдослучайных чисел в виде подпрограмм есть во всех вычислительных машинах и в большинстве языков программирования.

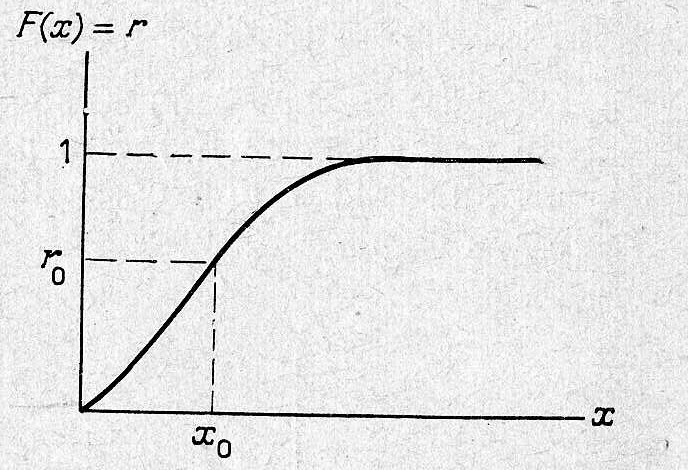


Рисунок 1. Кумулятивная функция распределения

Если требуется генерировать случайные числа xi из некоторой статистической совокупности с функцией плотности вероятнос­тей f*(х),* то сначала строят кумулятивную функцию распределе­ния F*(х)* (рис. 1). Так как F*(х)* изменяется на отрезке [0,1], то, чтобы получить случайные числа с этим распределением, можно генерировать равномерно распределенные случайные числа rи полагать F*(х)=r.* Ясно, что величина *х* однозначно определяется из этого соотношения. Следовательно, для конкретного значения r*,* скажем r0*,* можно найти величину *х,* в данном случае *х0,* связанную с r0 обратной функцией к F(если она известна):

где F-1(r) *—* обратное отображение величины r*,* заданной на еди­ничном интервале, в область изменения *х.* Математически этот метод можно выразить следующим образом: если мы генерируем равномерно распределенные случайные числа и ставим их в соответствие данной функции F(x), то есть

*, то*

*,*

*и следовательно* есть случайная величина с функцией плот­ности вероятностей f(x). Это равносильно выражению величины x через значение r при помощи (2.3). Такая процедура называется методом обратного преобразования.

Самым простым непрерывным распределением является, по-видимому, распределение с функцией плотности вероятностей, постоянной на интервале *(а, b)* и равной нулю вне его. Эта функция плотности вероятностей определяет так называемое равномерное, или прямоугольное, распределение. Равномерное распределение часто применяется в имитационных методах, во-первых, потому, что оно просто, а во-вторых, потому, что его можно использовать для генерирования случайных величин с другими вероятностными рас­пределениями.

Функция плотности вероятностей равномерного распределения имеет вид

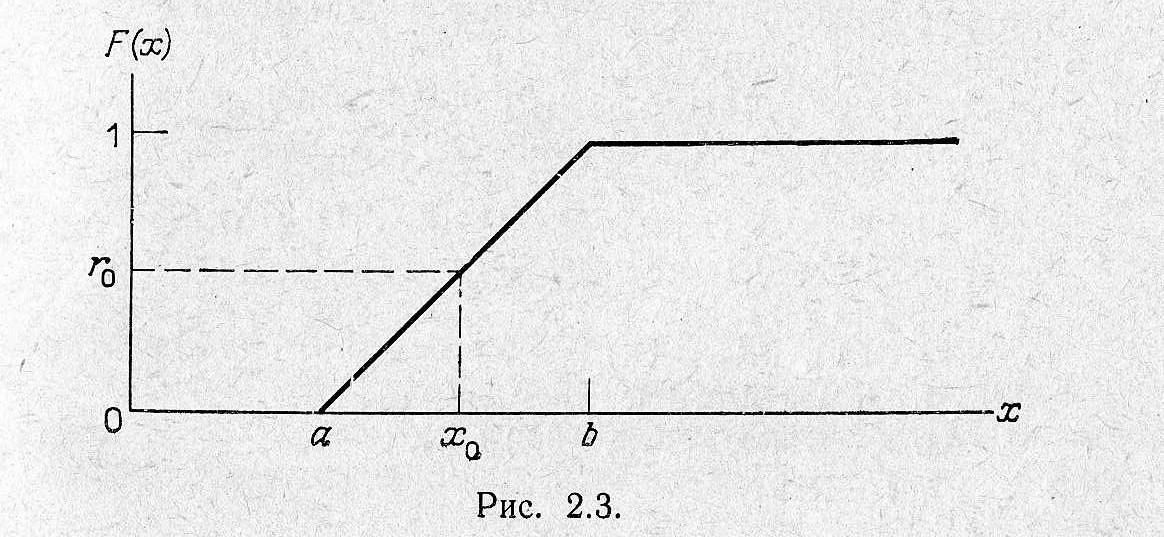
Здесь *X —* случайная величина, определенная на интервале *(а, b),* График равномерного распределения изображен на рис, 2.2,

Кумулятивная функция распределения F(x)равномерно рас­пределенной случайной величины *X* равна

Для имитации равномерного распределения на интервале *(а, b)* сначала в соответствии с формулой (2.2) надо получить обратное преобразование для (2.6):

*х=а+(b—а)r,* 0<г<1. (2.7)

Далее генерируются случайные числа, равномерно распределенные в интервале (0,1). Каждое случайное число r однозначно определяет реализацию равномерно распределенной случайной величины X.



На рис. 2.3 видно, что каждому значению r соответствует единст­венное значение х. Так, конкретное значение кумулятивной функ­ции распределения, равное r0, определяет значение х, равное х0. Очевидно, что процедуру можно повторять нужное число раз, и каж­дый раз она будет давать новое значение х.

Основные виды распределений случайных величин, используемые в моделировании

1. Равномерное распределение (прямоугольное распределение).

Функция плотности вероятности этого распределения задает вероятность того, что некоторое значение попадает в заданный интервал [a,b], и эта вероятность пропорциональна длине этого интервала.

Это распределение применяют часто в условиях полного отсутствия информации о случайной величине кроме   ее   предельных значений. Равномерное распределение характеризуется

* 1. функцией плотности вероятности: f(x)=1/(b-a),    a≤x≤b;
  2. математическим ожиданием: M=(а+b)/2;
  3. дисперсией: D=(b - a)2/12.

1. Треугольное распределение

Для этого распределения определяют 3 величины: минимум а, максимум b, и моду m (). График функции плотности вероятности состоит из двух отрезков прямых, один из которых возрастает при изменении х от минимального значения до моды, а другой убывает при изменении х от значения моды до максимума. Это распределение используется тогда, когда известно наиболее вероятное значение на некотором интервале и предполагается кусочно-линейный характер функции плотности вероятности.

Треугольное распределение характеризуется:

1. M = (a + b + m)/3;
3. Экспоненциальное распределение

Если вероятность того, что один и только один результат наступит на интервале  Δt  пропорциональна Δt, и если наступление результата не зависит от наступления других результатов  (т.е. процесс характеризуется отсутствием последействия), то величины интервалов между результатами распределены экспоненциально.

Это распределение характеризуется функцией плотности распределения:   , где х>0,   М – математическое ожидание; D=М2.

1. Распределение Пуассона

Это распределение является дискретным и связано обычно с числом результатов за определенный период времени. Если интервалы между появлением результатов распределены экспоненциально, то число, появившихся результатов в данный отрезок времени будет распределено в соответствии с распределением Пуассона.

Характеристики распределения:  
 ,  x=0,1,2,...;     
D = М.

1. Нормальное (гауссово) распределение

Широко применяется  в моделировании. Это определено значением центральной предельной теоремы, которая утверждает, что при весьма нестрогих условиях распределение средней величины или суммы N- независимых наблюдений из любого распределения стремится к нормальному по  мере увеличения N. (**Центральные предельные теоремы**  — класс теорем в [теории вероятностей](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9), утверждающих, что сумма достаточно большого количества [слабо зависимых](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B5%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_(%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9)) [случайных величин](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BB%D1%83%D1%87%D0%B0%D0%B9%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0), имеющих примерно одинаковые масштабы (ни одно из слагаемых не доминирует, не вносит в сумму определяющего вклада), имеет [распределение](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9), близкое к [нормальному](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Так как многие случайные величины в приложениях формируются под влиянием нескольких слабо зависимых случайных факторов, их распределение считают нормальным. При этом должно соблюдаться условие, что ни один из факторов не является доминирующим. Центральные предельные теоремы в этих случаях обосновывают применение нормального распределения. [Википедия])

Распределение характеризуется   , x∈(–∞, +∞).

M=m;

D=σ2.

1. Логарифмическое нормальное распределение

Это распределение такой случайной величины, натуральный логарифм которой нормально распределен. Оно пригодно для моделирования мультипликативных процессов так же, как нормальное - для аддитивных.

Распределение характеризуется функцией плотности вероятности:

1. Биномиальное распределение .

Это распределение вероятностей случайной величины X с целочисленными значениями х=0,1,2,...,n.

Пусть проводится эксперимент, в результате которого нас интересует, произошло событие А или не произошло. Случай, в котором событие А произошло, назовем успехом, вероятность этого события Р(А) = р. Если же событие А не произошло, то его вероятность Р(‾А) = 1 – р = q. Предположим теперь, что серия независимых испытаний такого типа проводится n раз. Нас интересует вероятность события, состоящего в том, что успех произошел ровно m раз, или вероятность того, что дискретная случайная величина Х, равная числу успехов, примет значение x. Решение этой задачи имеет вид:

Функция вероятности характеризуется формулой: , где ;  0≤p≤1 ;  n≥1.

Функция распределения:

Математическое ожидание:  M(x) = n\*p

Дисперсия:  D(x)= n\*p\*(1-p).

1. Распределение Вейбулла

Это распределение характеризуется функцией  распределения: ,  где b - параметр масштабирования, a*-*параметр кривизны.

Распределение Вейбула часто используется в теории надежности для описания времени безотказной работы приборов.

1. Распределение Коши

Это распределение   характеризуется плотностью вероятности:   
 , где l и m (мода и медиана) - параметры данной функции, –∞<m<+∞ и l>0.

 10. Распределение Эрланга

Это распределение   характеризуется плотностью вероятности

где k > 0 - коэффициент Эрланга, m - математическое ожидание.

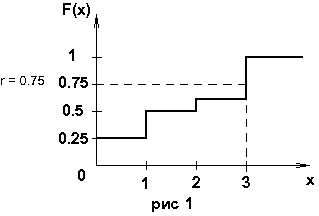
**Методы получения случайных величин,** **распределенных по заданному закону**

1. Метод обратной функции

В основе метода лежит факт того, что случайная величина r=F(x) равномерно распределена на интервале [0,1]. Для генерации случайной величины из распределения х генерируется случайное число r и решается уравнение r = F(x) относительно значения х=F-1(r).

Например, функция экспоненциального распределения имеет вид , где 1/λ – математическое ожидание. Приравнивая F(x) = r  и решая уравнения относительно х, получаем .

Этот  метод применим и для дискретных  распределений (см. рис. 1).



Достоинства метода: точность метода; не требуется составления и хранения в памяти таблиц.

Основная трудность этого метода - поиск обратного преобразования   
F-1(r). Для ряда непрерывных распределений представление обратной функции в явном виде отсутствует. Для всех основных распределений, не имеющих явного представления обратной функции, разработаны специальные методы генерации.

1. Табличный метод

В качестве аргумента используется равномерно распределенное случайное число r, в качестве функции – последовательность чисел xi, задающих закон распределения. Для этого формируется таблица  
<F(xi), xi>,  i =1, 2, ..., N.

Значение случайного числа Х с заданным законом распределения находят методом линейной интерполяции по формуле:

где ;  i=1, 2, . . , N.

Поиск нужного интервала производится методом последовательного сравнения j-го случайного числа с границами интервалов F(xi),  i =1,2,...,N  до выполнения условия .

Достоинства табличного метода: имеется возможность генерировать случайные последовательности с любым заданным законом; любую заданную точность можно получить при увеличении количества интервалов; требуется только одно случайное равномерное распределенное число и выполнение несложных операций, занимающих мало времени.

1. Использование функциональных особенностей распределений

Этот метод используется в тех случаях, когда аналитически не удается вычислить интеграл от функции плотности вероятности.

Так, для генерации случайных чисел X, имеющих специальное эрланговское распределение, можно вос­пользоваться kравномерно распределенными случайными числами ri:

Для генерации нормально распределенных случайных чисел используется центральная предельная теорема, на основании которой суммируются N равномерно распределенных случайных чисел для получения нормально распределенного случайного числа X. Обычно,  принимают N = 12..20.

 , где σ –  требуемое среднеквадратичное отклонение,  а М – требуемое математическое ожидание генерируемых случайных чисел.

*Оценка качества случайных последовательностей*

Для оценки качества случайных последовательностей с заданным законом распределения используется тест проверки частот и метод доверительного интервала для математического ожидания.

***ЗАДАНИЕ***

Запрограммировать генерацию  случайных величин по заданному закону распределения, определяемую вариантом задания. Для выборки из 100 случайных величин определить их характеристики:  математическое ожидание М,  дисперсию D и среднеквадратичное отклонение σ; построить графики  функций  плотности  вероятностей f(X) / p(X) / и F(X). Выполнить оценку качества полученной  случайной  последовательности.

***Порядок выполнения работы:***

1. Изучить теоретическую часть.

*2.* Ответить на контрольные вопросы.

3. Получить у преподавателя номер варианта задания.

4. Выполнить задание и оформить отчет.

***Содержание отчета.***

1. Описание исходных данных и хода выполнения задания.

2. Результаты моделирования (характеристики, графики).

3. Выводы.

***Контрольные вопросы***

1. Что такое распределение случайной величины и какими функциями оно характеризуется?

2. Как вычисляются функции f(x) по F(x) и наоборот F(x) по f(x)?

3. Качественно  изобразите  графики  функций f(x) и F(x) для основных видов распределений случайных величин.

4. Сформулируйте основные положения метода обратной функции.

5. Сформулируйте основные положения табличного метода.

6. Постройте графики р(х) и F(x) для дискретного распределения,  заданного следующей функцией вероятности:     р(0)=0,5    р(1)=0,3    р(2)=0,2 и, используя метод, обратной функции преобразуйте случайные числа 0,025;   0,91;   0,37;   0,26;   0,31  в выборку заданного распределения.

**Варианты задания для лаб. раб. 2**

**/ дискретный закон распределения случайной величины /**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер варианта | Вид закона распределения | Характеристики | |  |
|  |  | Мат. Ожидание | Max | p |
| 1 | З-н Пуассона | 26 | 78 |  |
| 2 | З-н Бернулли |  | 78 | 0,3 |
| 3 | З-н Пуассона | 38 | 114 |  |
| 4 | З-н Бернулли |  | 114 | 0,9 |
| 5 | З-н Пуассона | 22 | 66 |  |
| 6 | З-н Бернулли |  | 66 | 0,04 |
| 7 | З-н Пуассона | 30 | 90 |  |
| 8 | З-н Бернулли |  | 90 | 0,71 |
| 9 | З-н Пуассона | 31 | 93 |  |
| 10 | З-н Бернулли |  | 93 | 0,92 |
| 11 | З-н Пуассона | 33 | 99 |  |
| 12 | З-н Бернулли |  | 99 | 0,63 |
| 13 | З-н Пуассона | 23 | 69 |  |
| 14 | З-н Бернулли |  | 69 | 0,19 |
| 15 | З-н Пуассона | 53 | 159 |  |
| 16 | З-н Бернулли |  | 159 | 0,52 |
| 17 | З-н Пуассона | 40 | 120 |  |
| 18 | З-н Бернулли |  | 120 | 0,81 |
| 19 | З-н Пуассона | 28 | 84 |  |
| 20 | З-н Бернулли |  | 84 | 0,89 |
| 21 | З-н Пуассона | 24 | 72 |  |
| 22 | З-н Бернулли |  | 72 | 0,66 |
| 23 | З-н Пуассона | 39 | 117 |  |
| 24 | З-н Бернулли |  | 117 | 0,66 |
| 25 | З-н Пуассона | 52 | 156 |  |